Klausurübungen für Examenskandidaten (experimentelle Physik, Lehramt vertieft)

Prof. Dr. Bert Hecht

Ausgegeben am 17.07.2007, Übungen jeweils Dienstag um 10:15 in SR 7
Übungsblätter und Vorlesungsfolien im Internet: www.nanoscale-optics.de → teaching
Für Rückfragen: hecht@physik.uni-wuerzburg.de, Zimmer B 032, Tel. 888-5863

Lösung Blatt 11: Kerne & Teilchen

Aufgabe 22 (Herbst 2005): Spurenelementanalyse (20 Punkte)

Spritzmittel, die im Weinbau verwendet werden, können Arsen enthalten. Um festzustellen, wie viel davon in den Wein gerät, werde eine Weinprobe mit der Masse 2,0 g (Dichte = $1 g/cm^3$) für 16,0 Minuten in einem Reaktor mit einer Neutronenflussdichte $\Phi = 1{,}0 \cdot 10^{15}\ s^{-1}\ cm^{-2}$ bestrahlt. Dabei wird natürliches ^{75}As in ein radioaktives As-Isotop mit $T_{1/2}$ = 26,5 h umgewandelt (Aktivierung). Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess beträgt $\sigma = 5.4 \cdot 10^{-24}\ cm^2$.

a. Geben Sie die Reaktionsgleichung für den Neutroneneinfang an. Diskutieren Sie stichwortartig, welcher Zerfallsprozess für das radioaktive As-Isotop zu erwarten ist und geben Sie die zugehörige Zerfallsgleichung an. Hinweis: Es gibt nur ein stabiles Arsen-Isotop. (5)

b. Berechnen Sie die Anzahl N_{akt} der As Atome, die im gesamten Bestrahlungsprozess aktiviert werden, wenn die Probe zu 10^{-5} Gewichtsteilen aus Arsen besteht.

   Diskutieren Sie, inwiefern N_{akt} exakt der am Ende der Bestrahlung vorhandenen Anzahl N_0 der radioaktiven As Atome entspricht. (5)

c. Bei der Relaxation der Tochterkerne des radioaktiven As werden γ-Quanten emittiert. Begründen Sie, warum man bei der Benutzung eines γ-Quanten-Detektors für jedes registrierte γ-Quant eindeutig bestimmen kann, ob es vom As-Zerfall stammt. (3)

d. Vom Detektor wird 1% der von der Probe emittierten γ-Quanten registriert. Berechnen Sie, wie viele As-Zerfälle während der Messzeit stattfinden müssen, damit sich die Arsenmenge mit einem relativen Fehler ≤ 1% bestimmen lässt. (3)

e. Bestimmen Sie, ob bei einer Anfangskonzentration $N_0 = 5 \cdot 10^9\ cm^{-3}$ diese Messgenauigkeit erreicht wird für eine Messzeit T_{mess} = 10 s. (Die Messung beginnt sofort nach dem Ende der Bestrahlung.) (4)

a) $^{75}As + n \underset{\sigma=5.4\cdot10^{-24}cm^2}{\rightarrow} {}^{76}As \underset{T_{1/2}=26.5h}{\overset{\beta^-}{\rightarrow}} {}^{76}Se$

Durch Neutroneneinfang wird As zu einem neutronenreichen Isotop. Daher wird durch den stattfindenden Zerfall die Neutronenzahl reduziert. Deswegen zerfällt das Isotop durch β^--Zerfall.

$n \rightarrow p + e^- + \nu_{e^-}$

Für einen α-Zerfall ist der Kern noch zu leicht.

b)

Während der Bestrahlung gilt für die Produktionsrate P von ^{76}As: $P = \sigma \cdot \Phi_n \cdot N_{As}$.

Für die Zahl der As-Atome N_{As} gilt:

$$N_{As} = m_{\mathrm{Pr}obe} \cdot 10^{-5} \frac{1}{75\, amu} = \frac{0.002\mathrm{kg} \cdot 10^{-5}}{75 \cdot 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 16 \cdot 10^{16} \quad .$$

Somit ergibt sich für die Produktionsrate

$$P = \sigma \cdot \Phi_n \cdot N_{As} = 5.4 \cdot 10^{-24} cm^2 \cdot 10^{15} \frac{1}{cm^2 s} \cdot 16 \cdot 10^{16} = 8.6 \cdot 10^8 \frac{1}{s}$$

d.h. in 16 Minuten werden $N_{akt} = P \cdot t = 8.6 \cdot 10^8\ s^{-1} \cdot 960\ s = 8{,}256 \cdot 10^{11}$ ^{76}As Kerne produziert, d.h. nur jeder 200´000 Kern wird aktiviert.

Die tatsächliche Anzahl nach der Bestrahlungszeit ist geringfügig kleiner, da während der Bestrahlung bereits Zerfälle stattgefunden haben und dadurch die Anzahl von ^{75}As-Kernen leicht abnimmt.
Deren Anzahl ist aber vernachlässigbar, da die Bestrahlungszeit $\sim 10^{-2} \cdot T_{1/2}$ und da $N_{akt} \ll N_{As}$ ist.

c) Eindeutigkeit ist gewährleistet, weil (i) die Quantenenergie für den betreffenden Zerfall charakteristisch ist, und (ii) der Spannungspuls am Detektor der Quantenenergie entspricht.

d)

Relativere Fehler : $\frac{\Delta Z}{Z}$. Es soll gelten $\frac{\Delta Z}{Z} \leq 0.01$ wobei ΔZ den statistischen Fehler angibt. Bei einer Anzahlmessung sind die Messergebnisse Poisson verteilt, d.h. $\Delta N = \sqrt{N}$. Somit

$0.01 = \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{Z}}{Z}$. Es müssen also mindestens 10^4 ^{76}As-Zerfälle nachgewiesen werden.
Dazu müssen 10^6 Zerfälle stattfinden.

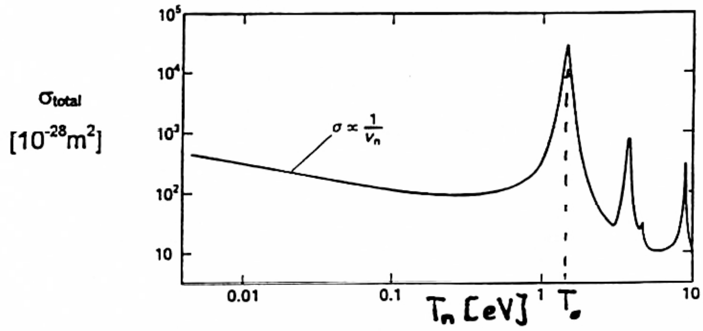
e) $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Damit ergibt sich für die Anzahl der Zerfälle $Z(t) = N(0) - N(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}\right)$. Nach einer Zeit von 10s ergibt sich somit

$$Z(10s) = 5 \cdot 10^9 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot 10s}\right) = 363271.$$

Die erforderliche Genauigkeit ist bei den gegebenen Parametern nicht erreichbar.

Aufgabe 23 (Frühjahr1998): Resonanzen in der Neutronenstreuung (20 Punkte)

Streut man Neutronen an natürlichem Indium (96% $^{115}_{49}In$, 4% $^{113}_{49}In$) so erhält man den in der Abbildung gezeigten Verlauf des totalen Wirkungsquerschnittes σ_{total} als Funktion der kinetischen Energie T_n der Neutronen. Um T_n=T_o = 1.46 eV beobachtet man eine Resonanz, die von der Bildung des Compound-Kerns $^{116}_{49}In^*$ herrührt.



In der Nähe der Resonanzenergie T_o wird der totale Wirkungsquerschnitt nach Abzug des Untergrundes durch die Breit-Wigner Formel beschrieben

$$\sigma(T_n) = \pi(\frac{\lambda}{2\pi})^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma}{(T_n - T_o)^2 + \Gamma^2/4} \quad .$$

Hierbei ist $\lambda=h/p_{CM}$ die deBroglie-Wellenlänge im Schwerpunktsystem und T_o der Wert von T_n jeweils im Maximum der Resonanz, Γ die volle Breite der Resonanz auf halber Höhe des Maximums. $g\Gamma_n = D_n$ ist eine Konstante, die für diese Reaktion den Wert D_n = 1,65 meV hat.

a) Erläutern Sie **eine** Methode zur Herstellung von monoenergetischen Neutronen.

(3 Punkte)

Vernachlässigen Sie im folgenden den nichtresonanten Untergrund und den Beitrag von Resonanzen bei höheren Energien.

b) Die totale Breite Γ der Resonanz beträgt Γ = 75 meV. Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer τ. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt im Maximum der Resonanz.

(4 Punkte)

d) Berechnen Sie den über die gesamte Resonanz integrierten totalen Wirkungsquerschnitt $\int_0^\infty \sigma(T_n)dT_n$. (3 Punkte)

(Hinweis: Verwendet man die Substitution $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2(T_n - T_o)}{\Gamma}$ und α als Integrations-variable, so ergibt sich $\int \sigma(T_n)dT_n = \frac{\lambda^2}{2\pi} D_n \int d\alpha$).

e) Ein monoenergetischer Neutronenstrahl (Energiebreite $\Delta T_n \ll \Gamma$) mit der Energie $T_n=T_o$ und dem Teilchenfluß $\dot{N}_n = 1{,}0 \cdot 10^7 s^{-1}$ trifft auf einen Streuer der Dicke $L=5{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm aus natürlichem Indium ($\rho_{In}=7{,}31$ g/cm^3).

Berechnen Sie die totale Reaktionsrate $\dot{N}_{total}$. (4 Punkte)

f) Der Neutronenstrahl habe den gleichen Teilchenfluß wie unter e) sei aber nicht monoenergetisch sondern habe eine Energiebreite von $\Delta T_n = \pm 300$ meV um die mittlere Strahlenergie $\bar{T}_n$. Die Neutronenintensität sei über das ganze Energie-intervall konstant.

Berechnen Sie die totale Reaktionsrate für den Fall $\bar{T}_n=T_o$. (2 Punkte)

g) Skizzieren Sie in einer linearen Skala (Abszisse in meV, Ordinate jeweils normiert auf die maximale Reaktionsrate) für die beiden Fälle e),f) den Verlauf der totalen Reaktionsrate als Funktion der Differenz zwischen der (mittleren) Strahlenergie $T_n(\bar{T}_n)$ und der Resonanzenergie T_o. (2 Punkte)

a) Methoden zur Herstellung von monoenergetischen Neutronen:
Allgemein kann man hier jede beliebigen Monochromator beschreiben, den man bei Neutronen anwenden kann (aus gleicher Wellenlänge folgt gleiche Energie), z.B.

- Bragg-Streuung an Kristallen:
  Die Neutronen verlassen den Reaktor als kollimierter Strahl mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung. Durch einen drehbaren Kristall mit bekanntem Netzebenenabstand d kann ein wählbarer Einfallswinkel α eingestellt werden. Damit können in der Richtung $2\,\alpha$ gegen den Einfallswinkel Neutronen mit einer deBroglie-Wellenlänge $\lambda_D = 2\,d\,\sin\alpha$ also mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{h}{2\,m_e\,d\sin\alpha}$ selektiert werden. (vgl. Demtröder, Experimentalphysik Band 3)
- Flugzeitmethode:
  Da die Wellenlänge vom Impuls, d. h. auch der Geschwindigkeit der Neutronen ahängt ($\lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$), kann auch eine Flugzeitmethode zur Monochromatisierung verwendet werden. Durch zwei parallele, rotierende Scheiben im Abstand L, welche je einen Schlitz haben, können die Neutronen Geschwindigkeitsselektiert werden. Durch die erste rotierende Scheibe werden die Teilchen während eines kurzen Zeitintervalls Δt zur Zeit $t = 0$ durchgelassen. Nur Neutronen mit genau der Geschwindigkeit, welche benötigt wird, um die Strecke L zu überwinden, bevor der Schlitz der zweiten Scheibe weggedreht ist, verlassen die Anordnung wieder. Über die Rotationsfrequenz läßt sich die Wellenlänge einstellen.(vgl. Demtröder, Experimentalphysik Band 3)
- Kernreaktionen:
  Bei Kernreaktionen wie z. B. $d+{}^3\mathrm{H} \rightarrow{}^4\ \mathrm{H}+n$, $p+{}^7\mathrm{Li} \rightarrow{}^7\ \mathrm{Be}+n$, usw. werden Neutronen mit einer fest vorgegebenen Energie frei (monochromatische Neutronen), aber durch Stöße mit anderen Teilchen kann diese Energie vermindert werden.

(3 Punkte)

b) Berechnung der mittleren Lebensdauer τ
Wenn keine anderen Ursachen angegeben sind, wird eine endliche Breite einer Linie oder Resonanz durch die Unschärferelation $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ (Hammer/Hammer A3.2) bestimmt. Angewandt auf dieses Problem entspricht Γ der Energieunschärfe und τ der Zeitunschärfe. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \tau &= \frac{h}{2\pi} \\ \Rightarrow \qquad \tau &= \frac{h}{2\pi \cdot \Gamma} = \frac{4,1357 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eVs}}{2\pi \cdot 75 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{eV}} = 8,78 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

c) Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts im Maximum der Resonanz $\sigma_{tot}(T_0)$:
Dazu muß man $T_n = T_0$ in die angegebene Breit-Wigner-Formel einzetzen

$$\begin{aligned}
\sigma(T_0) &= \pi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{g\Gamma_n\Gamma}{(T_0-T_0)^2+\Gamma^2/4} \\
&= \pi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{D_n\Gamma}{\Gamma^2/4} \\
&= \pi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{4D_n}{\Gamma}
\end{aligned}$$

wobei $\lambda = \frac{h}{p_{CM}}$ ist. p_{CM} ist der Impuls des Compoundkernes mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_{\text{In}}m_n}{m_{\text{In}}+m_n}$, also

$$\begin{aligned}
p_{CM} &= \frac{m_{\text{In}}m_n}{m_{\text{In}}+m_n}\cdot v_n \\
&= \frac{m_{\text{In}}m_n}{m_{\text{In}}+m_n}\cdot\sqrt{\frac{2T_n}{m_n}} \\
&= \frac{m_{\text{In}}}{m_{\text{In}}+m_n}\cdot\sqrt{2T_nm_n}
\end{aligned}$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt bei T_0 ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\sigma(T_0) &= \pi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{4D_n}{\Gamma} \\
&= \pi\left(\frac{h}{p_{CM}}\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{4D_n}{\Gamma} \\
&= \pi\left(\frac{h}{2\pi}\frac{m_{\text{In}}+m_n}{m_{\text{In}}}\frac{1}{\sqrt{2T_nm_n}}\right)^2 \frac{4D_n}{\Gamma} \\
&= \pi\left(\frac{h}{2\pi}\frac{m_{\text{In}}+m_n}{m_{\text{In}}}\right)^2 \frac{1}{2T_nm_n}\frac{4D_n}{\Gamma} \\
&= \pi\cdot\left(\frac{6,6261\cdot10^{-34}\ \text{Js}}{2\pi}\cdot\frac{116}{115}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot1,67493\cdot10^{-27}\ \text{kg}\cdot1,46\cdot1,6\cdot10^{-19}\ \text{J}} \\
&\quad\cdot\frac{4\cdot1,65\cdot10^{-3}\ \text{eV}}{75\cdot10^{-3}\ \text{eV}} \\
&= 4,0\cdot10^{-24}\ \text{m}^2
\end{aligned}$$

(4 Punkte)

d) Berechnung des über die Resonanz integrierten totalen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{tot} = \int_0^\infty \sigma(T_n)\mathrm{d}T_n$:
Nach dem Hinweis verwendet man die Substitution $\tan\alpha = \frac{2(T_n-T_0)}{\Gamma}$. Damit ergibt sich

für die Integralgrenzen:

$$\begin{aligned}
T_n = 0 \quad &\Rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{2T_0}{\Gamma} \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(-\frac{2T_0}{\Gamma}\right) = \arctan\left(-\frac{2 \cdot 1,46\ \text{eV}}{75 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}}\right) = -1,55 \approx -\frac{\pi}{2} \\
T_n = \infty \quad &\Rightarrow \quad \tan\alpha = \infty \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Damit erhält man für das Integral

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \int_0^\infty \sigma(T_n)\mathrm{d}T_n \\
&= \frac{\lambda^2}{2\pi} D_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\lambda^2}{2\pi} D_n \pi \\
&= \frac{1}{2}\left(h \cdot \frac{m_{\text{In}} + m_n}{m_{\text{In}}}\right)^2 \frac{1}{2m_n T_0} \cdot D_n \\
&= \frac{1}{2}\left(6,6261 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot \frac{116}{115}\right)^2 \\
&\quad \cdot \frac{1}{2 \cdot 1,67493 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 1,46 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \cdot 1,65 \cdot 10^{-3}\ \text{eV} \\
&= 4,7 \cdot 10^{-25}\ \text{m}^2\text{eV}
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

e) Für die totale Reaktionsrate $\dot{N}_{total}$ gilt:

$$\dot{N}_{total} = \dot{N}_n \cdot \sigma(T_n) \cdot N_{^{115}\text{In}}$$

wobei hier $T_n = T_0$ und $N_{^{115}\text{In}}$ die Zahl der streuenden Indium-Atome ist. Da der Anteil von $N_{^{115}\text{In}}$ an natürlichem Indium 96 % beträgt, ist zunächst $N_{^{115}\text{In}} = 0,96 \cdot N_{\text{In}}$. Für die Zahl N_{In} gilt:

$$N_{\text{In}} = \frac{\rho_{\text{In}} \cdot L}{m_{\text{In}}}$$

Also erhält man insgesamt für die totale Reaktionsrate

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{total} &= \dot{N}_n \cdot \sigma(T_n) \cdot N_{^{115}\text{In}} \\
&= \dot{N}_n \cdot \sigma(T_n) \cdot 0,96 \cdot \frac{\rho_{\text{In}} \cdot L}{m_{\text{In}}} \\
&= 1,1 \cdot 10^7\ \text{s}^{-1} \cdot 4,0 \cdot 10^{-24}\ \text{m}^2 \cdot 0,96 \cdot \frac{7310\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}}{114,82 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} \\
&= 8,097 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

(4 Punkte)

f) Für die totale Reaktionsrate bei einem Neutronenstrahl endlicher Energiebreite muß man den zugehörigen Streuquerschnitt entsprechend umrechnen, da nicht mehr alle Neutronen des Teilchenflusses die Energie T_0 haben. Man mittelt also über den Wirkungsquerschnitt des Neutronenstrahls:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2\Delta T_n} \int_{T_0-\Delta T_n}^{T_0+\Delta T_n} \sigma(T_n) \mathrm{d}T_n$$

Dieses Integral löst man wie in Teilaufgabe d):

$$\begin{aligned}
T_n = T_0 - \Delta T_n \quad &\Rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{2(T_0 - (T_0 - \Delta T_n))}{\Gamma} = \frac{2\Delta T_n}{\Gamma} \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{2\Delta T_n}{\Gamma}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ eV}}{75 \cdot 10^{-3}}\right) \approx 0,92 \cdot \frac{\pi}{2} \\
T_n = T_0 + \Delta T_n \quad &\Rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{2(T_0 - (T_0 + \Delta T_n))}{\Gamma} = -\frac{2\Delta T_n}{\Gamma} \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(-\frac{2\Delta T_n}{\Gamma}\right) = \arctan\left(-\frac{2 \cdot 300 \cdot 10^3 \text{ eV}}{75 \cdot 10^{-3}}\right) \approx -0,92 \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Also hat man dann

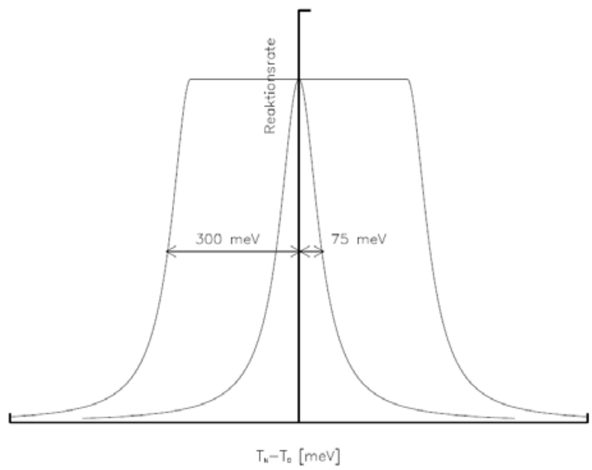
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2\Delta T_n} \frac{\lambda^2}{2\pi} D_n \cdot 0,92 \cdot \pi = \frac{1}{2\Delta T_n} \cdot 0,92 \cdot \sigma_{tot}$$

Damit erhält man für die totale Reaktionsrate bei einem Neutronenstrahl endlicher Breite:

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{total}(\bar{T}_n = T_0) &= \bar{\sigma} \cdot \dot{N}_n \cdot N_{^{115}\mathrm{In}} \\
&= \frac{1}{2\Delta T_n} \cdot 0,92 \cdot \sigma_{tot} \cdot \dot{N}_n \cdot N_{^{115}\mathrm{In}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 300 \cdot 10^{-3} \text{ eV}} \cdot 0,92 \cdot 4,7 \cdot 10^{-25} \text{ m}^2\text{eV} \\
&\quad \cdot 1,1 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \cdot 0,96 \cdot \frac{7310 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{114,82 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \\
&= 1,46 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

g) Skizze der totalen Reaktionsrate als Funktion der kinetischen Energie $T_n - T_0$ bzw. $\bar{T}_n - T_0$:
Die totale Reaktionsrate ist proportional zur entsprechenden Energiebreite des Neuronenstrahls



(2 Punkte)