

Klausurübungen für Examenskandidaten (experimentelle Physik, Lehramt vertieft)  
Prof. Dr. Bert Hecht

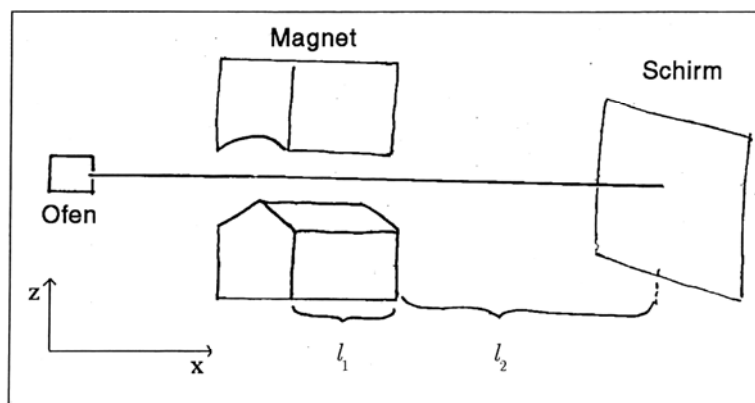
Ausgegeben am 15.05.2007, Übungen jeweils Dienstag um 10:15 in SR 7  
Übungsblätter und Vorlesungsfolien im Internet: [www.nanoscale-optics.de](http://www.nanoscale-optics.de) → teaching  
Für Rückfragen: hecht@physik.uni-wuerzburg.de, Zimmer B 032, Tel. 888-5863

Lösung Blatt 3: Atomphysik

**Aufgabe 5 (gestellt im Herbst 2004) Stern-Gerlach-Experiment**

**(20 Punkte)**

Ein Strahl von Silberatomen mit der Geschwindigkeit  $v_x = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  wird aus einem Ofen durch ein inhomogenes Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{B}(z)$  geleitet und trifft auf einen Schirm.



- a) Silber hat ein einzelnes Elektron in der äußersten Schale und sonst nur abgeschlossene Schalen. Geben Sie das magnetische Dipolmoment  $\vec{\mu}$  eines Silberatoms an. Diskutieren Sie zunächst qualitativ, welche Auswirkungen die Wechselwirkung des magnetischen Dipolmomentes mit einem homogenen Magnetfeld auf das Atom hat. (3 Punkte)
- b) Geben Sie den Ausdruck für die Kraft  $\vec{F}$  im inhomogenen Feld auf ein Atom mit dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{\mu}$  an, wenn das Feld wie in der Zeichnung in z-Richtung abnimmt. (2 Punkte)
- c) Geben Sie die Formel für die z-Komponente  $z(t)$  der Bahn eines Atoms im inhomogenen Feld mit einem konstanten Feldgradienten an.  
Berechnen Sie damit die Auslenkung  $z(l_1)$  am Ende des Magneten für  $\frac{dB}{dz} = -500 \frac{\text{T}}{\text{m}}$  und  $l_1 = 4 \text{ cm}$ . (Bohrsches Magneton  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$ ) (5 Punkte)
- d) Berechnen Sie die durch das Magnetfeld bewirkte Verschiebung des Auftreffpunktes auf dem Schirm, wenn sich dieser im Abstand  $l_2 = 10 \text{ cm}$  vom Ausgang des Magneten befindet. (5 Punkte)
- e) Das  $\text{Gd}^{3+}$ -Ion hat 7 Elektronen in der 4f-Schale. Alle anderen Schalen sind vollständig besetzt oder leer.  
Wie viele Elektronen finden maximal in der f Schale Platz?  
Welchen Wert nehmen nach den Hundschen Regeln die Spin- (S), die Bahn- (L), und die Gesamtdrehimpuls (J)-Quantenzahlen des  $\text{Gd}^{3+}$ -Ions an?  
Wie viele Teilstrahlen erwarten Sie im Stern-Gerlach-Experiment? (5 Punkte)

a) Silber hat eine Hülle die folgender Elektronenkonfiguration entspricht  $[\text{Kr}]4d^{10}5s^1$

Der Bahndrehimpuls ist also Null und es verbleibt nur der Spin des Elektrons, der für das magnetische Moment verantwortlich ist. Formel für das magnetische Moment:

$$\vec{\mu}_{Ag} = -g_s \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \text{und dessen z-Komponente} \quad \mu_{Ag, z} = -g_s m_s \mu_B, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Der Grundzustand ist bezüglich der Spinorientierung entartet. Diese Entartung wird im äußeren Feld aufgehoben. Im äußeren Feld gibt es für den Spin 1/2 zwei Einstellungen (Richtungsquantisierung).

b) Die Kraft ergibt sich als Ableitung des Potentials nach dem Ort

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}$$

Die potentielle Energie ist durch magnetische Aufspaltung gegeben

$$E_{mag} = -\vec{\mu}_{Ag} \vec{B}$$

Wir nehmen an, dass die Inhomogenität ausschließlich in z-Richtung vorliegt:

$$F_z = \mu_{Ag, z} \frac{dB}{dz}. \quad \text{Damit wird dann die Kraft:}$$

$$F_z = -g_s \mu_B \frac{dB}{dz} m_s, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Das gyromagnetische Verhältnis für den Spin ist etwa 2. Daher gilt für die Kraft:

$$F_z = \mp \mu_B \frac{dB}{dz} \quad \text{für Spin } \frac{1}{2} \text{ Zustand}$$

c) Für die Bewegung in z-Richtung gilt:

$$z(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

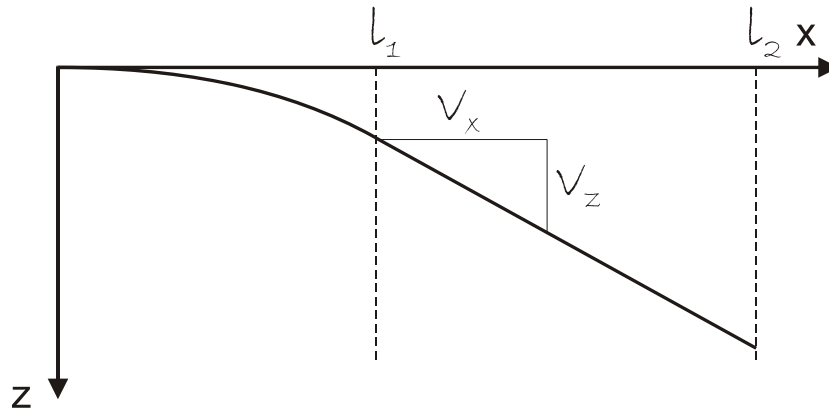
Damit gilt

$$z(l) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \left( \frac{l}{v_x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_B}{m} \frac{dB}{dz} \left( \frac{l}{v_x} \right)^2$$

$$z(l_1 = 4\text{cm}) = \frac{1}{2} \frac{\mu_B \cdot 500 \text{ T m}^{-1}}{108 \cdot 1.66057 \cdot 10^{-27}} \left( \frac{0.04\text{m}}{500\text{m s}^{-1}} \right)^2 = 82.7 \mu\text{m}$$

Dabei wurde von einer mittleren Massenzahl von 108 für Ag ausgegangen, da die beiden natürlichen Isotope 107 und 109 etwa gleichhäufig auftreten.

d) Skizze:



$$z(l) = z_1(l_1) + \frac{v_z}{v_x} l$$

$$z(l_2) = z(l_1) + \frac{l_2}{v_x} v_z = z(l_1) + \frac{l_2}{v_x} \frac{F}{m} t_1 = z(l_1) + \frac{l_2}{v_x} \frac{F}{m} \frac{l_1}{v_x} = 0.49 \text{ mm}$$

e)

Gd<sup>3+</sup> hat die Elektronenkonfiguration [Xe]4f<sup>7</sup>

Gd hat die Elektronenkonfiguration [Xe]4f<sup>7</sup>5d<sup>1</sup>6s<sup>2</sup>

Die Schale (n,l) nimmt maximal 2\*(2l+1) Elektronen auf.

f entspricht n=4, l=3, somit passen maximal 14 Elektronen in die f-Schale.

Hundsche Regeln:

1. Volle Schalen und Unterschalen tragen zum gesamten Drehimpuls L und S nichts bei.
2. Für Elektronen, die mit gleichen l auf die Unterzustände m<sub>l</sub> verteilt werden gilt im Grundzustand: Der Gesamtspin wird maximal (Zustände der höchste Multiplizität liegen wegen der Austauschwechselwirkung energetisch am niedrigsten! → Folge des Pauliprinzipis)
3. Bei der Realisierung des maximalen S werden die m<sub>l</sub> so besetzt, dass L<sub>z</sub> maximal wird

m <sub>l</sub>	m <sub>l</sub>					S	L	J
	2	1	0	-1	-2	Σ m <sub>s</sub>	Σ m <sub>l</sub>	
p-Schale (l=1)								
p <sup>1</sup>		↑				½	1	½
p <sup>2</sup>		↑	↑			1	1	0
p <sup>3</sup>		↑	↑	↑		1½	0	1½
p <sup>4</sup>		↑↓	↑	↑		1	1	2
p <sup>5</sup>		↑↓	↑↓	↑		½	1	1½
p <sup>6</sup>		↑↓	↑↓	↑↓		0	0	0

d-Schale (l=2)								
d <sup>1</sup>	↑					½	2	1½
d <sup>2</sup>	↑	↑				1	3	2
d <sup>3</sup>	↑	↑	↑			1½	3	1½
d <sup>4</sup>	↑	↑	↑	↑		2	2	0
d <sup>5</sup>	↑	↑	↑	↑	↑	2½	0	2½
d <sup>6</sup>	↑↓	↑	↑	↑	↑	2	2	4
d <sup>7</sup>	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	1½	3	4½
d <sup>8</sup>	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	1	3	4
d <sup>9</sup>	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	½	2	2½
d <sup>10</sup>	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	0	0	0

Quelle: [http://de.wikipedia.org/wiki/Hundsche\\_Regeln](http://de.wikipedia.org/wiki/Hundsche_Regeln)

USW. ...

#### 4. Bei Berücksichtigung der Spin-Bahn Wechselwirkung

Alle Spins stehen parallel ->  $S=7/2$  -> Multiplizität 8

Schale ist genau halb besetzt ->  $L=0$  ->  $J=7/2$

Der Zustand lautet daher  $^8S_{7/2}$  und spaltet im Magnetfeld in 8 Zustände auf.

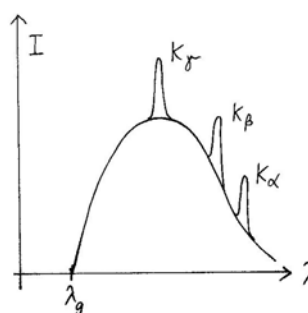
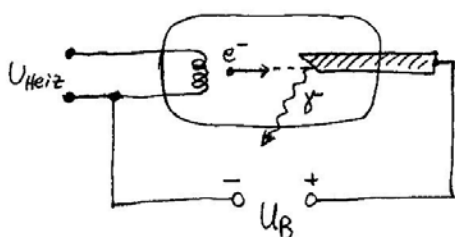
#### Aufgabe 6 (gestellt im Frühjahr 2006) Röntgenstrahlen

(20 Punkte)

- Skizzieren Sie Aufbau und Schaltung einer Röntgenröhre und erläutern Sie die in der erzeugten Strahlung auftretenden spektralen Komponenten! (3 P)
- Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man monochromatische Röntgenstrahlung erzeugen kann, und erläutern Sie, wie man damit eine bestimmte Wellenlänge auswählen kann! (3 P)
- Berechnen Sie für die Beschleunigungsspannung  $U_B = 50$  kV die Grenzwellenlänge sowie die Wellenlängen der ersten drei charakteristischen K-Linien für eine Kupferanode! (6 P)
- Beim Durchgang durch Materie wird die Röntgenstrahlung unter Vergrößerung ihrer Wellenlänge inelastisch gestreut. Beschreiben Sie den zu Grunde liegenden Prozess! Leiten Sie einen Ausdruck für die Wellenlängenänderung in Abhängigkeit vom Streuwinkel her für den Grenzfall, dass sich die Wellenlänge relativ nur wenig ändert! (5 P)
- Nennen Sie zwei weitere, grundsätzlich mögliche Mechanismen zur Schwächung von Röntgenstrahlung! Welcher kann speziell die mit der o.g. Beschleunigungsspannung von  $U_B = 50$  kV erzeugte Strahlung nicht abschwächen? (Begründung!) (3 P)

a)

Bremsstrahlung +  
charakterist. Strahlung



- b) Beugung (Bragg-Reflexion) an einem Festkörpergitter (an Gitternetzebenen)  
Wellenlänge wird durch die Netzebenenabstand und Beugungswinkel bestimmt

$$n\lambda = 2d \sin \vartheta$$

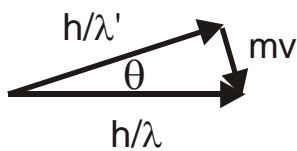
=> Wahl eines geeigneten Festkörpers und Reflexionswinkel

- c) Moseley-Gesetz:  $\lambda^{-1} = 3R (Z-1)^2 / 4$   
= Spezialfall (n=2) von  $\lambda^{-1} = R (Z-1)^2 (1 - 1/n^2)$  mit n=2 für  $K_\alpha$ , n=3 für  $K_\beta$  usw.

$$\Rightarrow \lambda_\alpha = 1.550 \cdot 10^{-10} \text{m}, \lambda_\beta = 1.308 \cdot 10^{-10} \text{m}, \lambda_\gamma = 1.240 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

$$\text{Grenzwellenlänge: } \lambda_g = h c / e U_B = 2.480 \cdot 10^{-11} \text{m} = 0.284 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

- d) Compton-Streuung = inelast. Streuung von Photonen and Elektronen, d.h. das Photon gibt Energie (und Impuls) an das Elektron ab, womit sich seine Wellenlänge vergrößert.



$$\text{Impulsbilanz: I: } \theta \approx m v / (h / \lambda) = m v \lambda / h$$

$$\text{Energiebilanz: II:}$$

$$m v^2 / 2 = h c / \lambda - h c / \lambda' = h c (\lambda' - \lambda) / \lambda \lambda' \approx h c (\lambda' - \lambda) / \lambda^2$$

$$\text{I+II: } m v^2 / 2 \approx h^2 \theta^2 / 2 m \lambda^2 \approx h c (\lambda' - \lambda) / \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda \approx h \theta^2 / 2 m c$$

- e) - Photoeffekt  
- Elektron-Positron-Paarbildung;  
diese erst ab  $2 \times 511 \text{ keV}$ , d.h. nicht für  $U_B = 50 \text{ kV}$