Klausurübungen für Examenskandidaten (experimentelle Physik, Lehramt vertieft)
Prof. Dr. Bert Hecht

Ausgegeben am 03.07.2007, Übungen jeweils Dienstag um 10:15 in SR 7
Übungsblätter und Vorlesungsfolien im Internet: www.nanoscale-optics.de → teaching
Für Rückfragen: hecht@physik.uni-wuerzburg.de, Zimmer B 032, Tel. 888-5863

Lösung Blatt 9: Festkörperphysik

Aufgabe 18 (gestellt im Herbst 2005): Fast freie Elektronen im Magnetfeld (20 Punkte)

In einem gut leitenden metallischen Material wirke ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung $\vec{B} = B\vec{e_z}$, sowie ein elektrisches Feld $\vec{E}$ in der x-y-Ebene.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die freien Elektronen auf unter der Annahme, dass auf sie eine Reibungskraft $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ wirkt mit dem Reibungskoeffizienten $\alpha = m/\tau$, wobei $m = 9,1095 \cdot 10^{-31}$ kg die Elektronenmasse und τ die Relaxationszeit ist.
(5 Punkte)

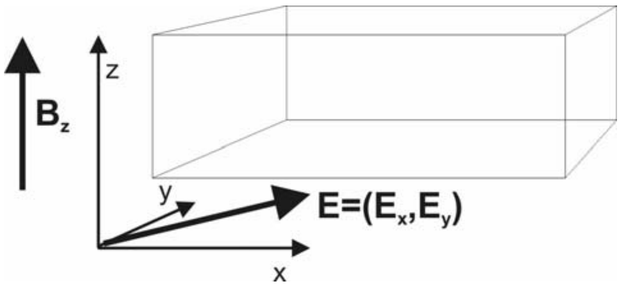
b) Für den stationären Fall ($\vec{v} = const.$) ergibt sich aus der Bewegungsgleichung eine Kräftebilanzgleichung. Stellen Sie mit Hilfe dieser Gleichung einen Zusammenhang zwischen der x- und y-Komponente des elektrischen Feldes und der x- und y-Komponente des Stromdichtevektors $\vec{j} = -ne\vec{v}$ her. $n = N/V$ ist die Zahl N der Elektronen pro Volumen V und $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ C ist der Betrag der Elektronenladung. Zeigen Sie, dass diese Relationen in der Form $\vec{E} = \overleftrightarrow{\rho}\,\vec{j}$ geschrieben werden können, wobei $\overleftrightarrow{\rho}$ die 2×2-Matrix des elektrischen Widerstandes ist.
(5 Punkte)

c) Nehmen Sie an, der Strom fließe nur in der x-Richtung, d. h. $j_y = 0$. Dieser Strom wird von einer Spannung hervorgerufen, die das elektrische Feld in x-Richtung produziert. Zeigen Sie, dass sich eine zusätzliche Feldkomponente in y-Richtung ergibt, nämlich das Hall-Feld und geben Sie den Hallkoeffizienten $R_H = E_y/j_xB$ an.
(5 Punkte)

d) Berechnen Sie die Zahlenwerte der Elektronendichte n aus den Meßwerten von R_H für Cu ($R_H = -7,37 \cdot 10^{-11}\Omega\text{m/Tesla}$), Ag ($R_H = -1,065 \cdot 10^{-10}\Omega\text{m/Tesla}$) und Au ($R_H = -1,058 \cdot 10^{-10}\Omega\text{m/Tesla}$).

Berechnen Sie die Zahlenwerte der Relaxationszeit τ aus den Meßdaten des elektrischen spezifischen Widerstandes $\rho_0 = \rho_{xx}(B = 0)$ für Cu ($\rho_0 = 2.24 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$), Ag ($\rho_0 = 2.13 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$) und Au ($\rho_0 = 2.84 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$).
(5 Punkte)

a) Skizze:



Es wirkt die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ sowie die Kraft auf Ladungen im elektrischen Feld $\vec{F} = q\vec{E}$. Damit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = -\frac{m}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} - e\vec{E} - e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

In Komponenten:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= -\frac{m}{\tau}\,\dot{x} - eE_x - e\,\dot{y}\,B_z \\ m\,\ddot{y} &= -\frac{m}{\tau}\,\dot{y} - eE_y + e\,\dot{x}\,B_z \\ m\,\ddot{z} &= -\frac{m}{\tau}\,\dot{z} \end{aligned}$$

b) $\vec{v} = const.$ → die Beschleunigung verschwindet. Damit erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{m}{\tau}\,\dot{x} - eE_x - e\,\dot{y}\,B_z \\ 0 &= -\frac{m}{\tau}\,\dot{y} - eE_y + e\,\dot{x}\,B_z \end{aligned}$$

Auflösen nach E und Einsetzen der Beziehung $\vec{j} = -ne\vec{v}$ liefert dann:

$$\begin{aligned} E_x = -\frac{m}{e\tau}v_x - v_y B_z &= \frac{m}{ne^2\tau}j_x + \frac{1}{ne}j_y B_z \\ E_y = -\frac{m}{e\tau}v_y + v_x B_z &= \frac{m}{ne^2\tau}j_y - \frac{1}{ne}j_x B_z \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \overset{\leftrightarrow}{\rho}\,\vec{j} = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & \frac{B_z}{ne} \\ -\frac{B_z}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix} \vec{j}$$

c) Bestimmung des Hallkoeffizienten

$$j_y = 0 \Rightarrow E_y = -\frac{1}{ne}j_x B_z = R_H j_x B_z$$

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z} = -\frac{1}{ne}$$

d) Bestimmung der Elektronendichten: $n = -\frac{1}{eR_H}$.

$$\text{Cu:} \quad n = 8.47 \cdot 10^{28}\mathrm{m}^{-3} \quad \text{Ag:} \quad n = 5.86 \cdot 10^{28}\mathrm{m}^{-3} \quad \text{Au:} \quad n = 5.90 \cdot 10^{28}\mathrm{m}^{-3}$$

Bestimmung der Relaxationszeit: $\rho = \frac{m}{ne^2\tau}$ (siehe Blatt 6) → $\tau = \frac{R_H \cdot m}{e \cdot \rho}$

$$\text{Cu:} \quad \tau = 1.9 \cdot 10^{-14}\mathrm{sec} \quad \text{Ag:} \quad \tau = 2.8 \cdot 10^{-14}\mathrm{sec} \quad \text{Au:} \quad \tau = 2.1 \cdot 10^{-14}\mathrm{sec}$$

Aufgabe 19 (gestellt im Frühjahr 2006): Thermische Ausdehnung (30 Punkte)

Die potentielle Gitterenergie eines Ions eines Kochsalzkristalls kann mit dem Ausdruck

$$W = \frac{-1}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Ae^2}{r} - \frac{B}{r^n}\right)$$

beschrieben werden, wobei A=1,75 die Madelung-Zahl ist. Die übrigen Größen betragen n=9 und $B=4\cdot10^{-74}e^2m^8$ (e=Elementarladung).

a) Erklären Sie qualitativ die Bedeutung der beiden Energieterme! 2 P

b) Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand r_0 der Na^+- und Cl^--Ionen, der durch das Potentialminimum gegeben ist!
Zeigen Sie auch, dass sich W damit schreiben lässt als

$$W = \frac{-Ae^2}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^{n-1}}{nr^n}\right).$$ 6 P

c) Entwickeln Sie die Energie um den Abstand r_0 bis zur 3. Ordnung sodass sie in der Form

$$W - W(r_0) \approx \gamma u^2 - \delta u^3 \quad mit\ u = r - r_0$$

geschrieben werden kann! Bestimmen Sie die Größen γ und δ einschließlich ihrer numerischen Werte! 7 P

(*Ersatzlösung:* $\gamma = 2VAs/m^2$; $\delta = 10^{10}\ VAS/m^3$)

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Ionen thermisch um ihre Gleichgewichtslage schwingen. Berechnen Sie klassisch die maximale Auslenkung u_0 in harmonischer Näherung des Potentials (d.h. für $\delta = 0$) unter der Annahme, dass die verfügbare Energie kT beträgt (k = Boltzmannkonstante, T = absolute Temperatur).
Berechnen Sie auch den numerischen Wert von u_0 für T=300 K!
Wo befindet sich in dieser Näherung das schwingende Ion im zeitlichen Mittel und was bedeutet dies für den thermischen Ausdehnungskoeffizient? 5 P

e) Zeigen Sie, dass sich im Fall des anharmonischen Potentials ($\delta > 0$) die Verschiebung des örtlichen Mittelwerts eines Ions zu

$$\Delta u = \delta\, kT / 2\gamma^2$$

ergibt!
Schreiben Sie dazu die gegenüber (d) modifizierte Auslenkung als $u_0' = u_0 \pm \Delta u$ und verwenden Sie, dass $\Delta u = \Delta u(T) << u_0$!
Benutzen Sie das Ergebnis zur Berechnung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten und bestimmen Sie auch dessen numerischen Wert!

10 P

a) 1. Term: Coulomb-Energie; 2. Term: Abstoßung durch Pauliprinzip 2 P

b) $\partial W / \partial r = 0 \ \Rightarrow r_0 = (nB / Ae^2)^{1/(n-1)} = 0{,}564nm$

$$\to B = Ae^2 r_0^{n-1}/n \ \to W = \frac{-Ae^2}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^{n-1}}{nr^n}\right)$$ 6 P

c) Taylorentwicklung um r_0:

$$W(r) = W(r_0) + \partial W/\partial r\,|_{r_0}\ (r-r_0) + \frac{1}{2}\partial W^2/\partial r^2\,|_{r_0}\ (r-r_0)^2 + \frac{1}{6}\partial W^3/\partial r^3\,|_{r_0}\ (r-r_0)^3 + ...$$

$$\partial W/\partial r\,|_{r_0} = 0\ ;\ \frac{1}{2}\partial W^2/\partial r^2\,|_{r_0} = \frac{Ae^2(n-1)}{48\pi\varepsilon_0 r_0^3} = \gamma; \quad \frac{1}{6}\partial W^3/\partial r^3\,|_{r_0} = \frac{-Ae^2(n-1)(n+4)}{144\pi\varepsilon_0 r_0^4} = -\delta$$

$$\Rightarrow W - W(r_0) = \gamma u^2 - \delta u^3 \quad wobei\ u = r - r_0$$

$mit\ \ \gamma = 1{,}5 VAs/m^2\ \ und\ \ \delta = 0{,}55\cdot 10^{10}\ VAs/m^3$ 7 P

d)

$\gamma u^2 = kT \ \Rightarrow\ u_0 = r - r_0 = \sqrt{kT/\gamma} \approx 0{,}053\,nm$ 3 P

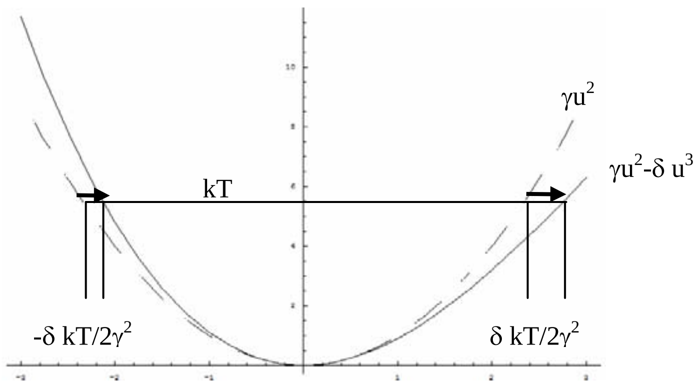
Im zeitlichen Mittel befindet sich das Ion bei $r = r_0$, d.h. der Ausdehnungskoeff. ist $\alpha = 0$
2 P

e) Verwende, dass Δu klein gegen u_0:

$$\gamma(u_0 + \Delta u)^2 - \delta(u_0 + \Delta u)^3 = kT \ \Rightarrow \Delta u = \delta\cdot kT/2\gamma^2$$

$$\gamma(u_0 - \Delta u)^2 - \delta(u_0 - \Delta u)^3 = kT \ \Rightarrow \Delta u = -\delta\cdot kT/2\gamma^2$$

6 P



Wie man der Grafik entnehmen kann verlagert sich der Umkehrpunkt für beide Schwingungsrichtungen nach rechts → Effektiv nimmt der mittlere Abstand um den betreffenden Betrag zu!

$$r = r_0(1 + \alpha\cdot\Delta T) \Rightarrow \alpha = \frac{d(\Delta u)/dT}{r_0} = \frac{\delta\cdot k}{2\gamma^2 r_0}$$

$$\Rightarrow \alpha = 3\cdot 10^{-5}/K$$